

Title	2次元および3次元モデルを用いたエッジトーンの数値解析 (オイラー方程式の数理解析: 力学と変分原理250年)
Author(s)	高橋, 公也; 宮本, 真孝; 伊藤, 泰典; 高見, 利也; 小林, 泰三; 西田, 晃; 青柳, 睦
Citation	数理解析研究所講究録 (2011), 1749: 121-136
Issue Date	2011-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/171098
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

2次元および3次元モデルを用いたエッジトーンの数値解析

九州工業大学大学院 情報工学研究院 高橋公也 (Kin'ya Takahashi)*

九州工業大学大学院 情報システム専攻 宮本真孝 (Masataka Miyamoto),

伊藤泰典 (Yasunori Ito)*

九州大学 情報基盤研究開発センター 高見利也 (Toshiya Takami), 小林泰三 (Taizo Kobayashi),

西田晃 (Akira Nishida), 青柳睦 (Mutsumi Aoyagi)**

* Physics Laboratories, Kyushu Institute of Technology

** Research Institute for Information Technology, Kyushu University

1 はじめに

この論文では、2次元及び3次元モデルを用いたエッジトーンの数値解析について報告する。エッジトーンは、流体音（空力音）の典型的なモデルの1つであり、Brownの著名な研究を含め長い研究の歴史があるが、現在でもその詳細は完全に明らかにされているとは言えない [1, 2, 3, 4]。また、エッジトーンは、エアリード楽器（リコーダー、フルート等）の音源でもあり、その場合、流体音とキャビティー共鳴の相互作用の問題として極めて興味深い問題を提示する [4, 5, 6, 7]。

近年、我々はエアリード楽器のシミュレーションに取り組み、圧縮性の Large Eddy Simulation (LES) を用いて小型エアリード楽器の発振の再現に成功し、楽器を特徴付ける基本的な発振特性も再現可能であることを示した [8, 9, 10]。その過程で、流体音源の基礎的な性質を知ることが楽器の発音機構の解析において極めて重要であるとの認識に至った。そこで、この論文では、基礎研究として、エアリード楽器の音源となるエッジトーンに焦点を絞り、その流体音源の性質を数値計算を用いて解析する [11]。具体的には、Lighthillの音源と Howeの音源を数値的に再現し [4, 5, 12]、それらの音源が流体の流れのどのような部分で発生し、どのような分布の特徴を持つかを明らかにする。さらに、Lighthillの音源と Howeの音源を比較し、どのような違いがあるかを明らかにし、その違いを作り出す要因について考察する。

2 エッジトーン

図1に示すように、エッジトーンは、エッジに衝突して振動するジェットが作り出す流体音であり [1, 2, 3, 4]、エアリード楽器の音源となる [4, 5, 6, 7]。このように、エッジトーンの発生原理は、一見簡単に見えるが、不安定なジェットの挙動とそこから発生する音を扱うために、現在でもその詳細は完全には理解されていない。しかし、実験及びそれにもとづく半経験的な理論により、ジェットの流速と発振周波数の関係は、かなり正確に分かっている [1, 2, 3, 4]。それらの中で初期の最も重要な仕事は、Brownによって行われた [1]。次式は、Brownによって与えられたジェットの流速 V と発振周波数 f の関係を表す式である。

$$f = 0.466j(100V - 40)(1/(100l) - 0.07) \quad (1)$$

ここで、 l はノズルとエッジの距離で、 j は振動の次数によって決まる係数で $j = 1.0, 2.3, 3.8, 5.4$ となり、 $j = 1$ が基音である。ジェットの流れ速 V の増加とともに、基音が発振し、その周波数 f は V に比例して増加する。しかし、 V がある閾値を越えると別の次数の振動へと遷移する。各振動状態間の遷移は履歴的で、 V を減少させた時の遷移は、上昇時の遷移とは一般に異なる。この論文では、基音の発振状態での流体音に焦点を絞り、遷移は扱わない。

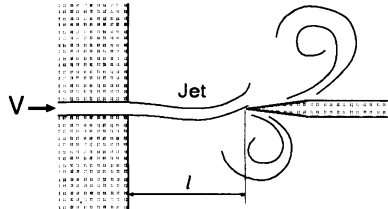


図 1: エッジトーン

3 Lighthill の音響的類推

乱流から発生する音は、一般に空力音または流体音と呼ばれる。それらは、高い Reynolds 数を持つ流体運動の極めて小さな副産物であると考えてよい。流体音源の定式化は、Lighthill によって行われた [12]。Lighthill は、流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式と連続の式を組み合わせ、厳密な計算のもとで、音波に対する以下の様な非同次方程式を導いた。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \right) (\rho - \rho_0) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2)$$

左辺の同次項は密度 ρ (ρ_0 は平衡状態の値) に対する音波の方程式なので、右辺の非同次項が音源項と解釈される。ここで、 c_0 は (平衡状態の) 音速で、 T_{ij} は Lighthill のテンソルと呼ばれ以下のように定義される。

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + ((p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)) \delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (3)$$

ここで、 σ_{ij} は粘性応力テンソルである。式 (2) の右辺の非同次項は 2 階の偏微分で表せるので、流体音源は 4 重極的に振る舞うと予想される。音源から発生した音波は、流れがある場合にもあたかも静止流体中を伝搬する音波のように振る舞う。そのために、Lighthill の音響的類推と呼ばれることが多い。

Reynolds 数が大きい場合には σ_{ij} の効果を見捨てるのが可能である。さらに、線形断熱近似

$$(p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0) = 0 \quad (4)$$

が、成り立つとすると、式 (3) の第 2 項、第 3 項は無視でき、第 1 項 $\rho v_i v_j$ が主な音源を作り出す。一般に、音の粒子速度は流れのそれに比べ十分に小さいので、音源項の計算は、非圧縮性を

仮定した計算で良い近似が得られると考えられる。そこで、 $\rho = \rho_0$ 、 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ として、音源項を近似すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} &\sim \rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \rho_0 (s_{ij}^2 - w_{ij}^2) \\ &= \rho_0 \text{div}(\omega \times \mathbf{v}) + \rho_0 \nabla^2 \left(\frac{1}{2} v^2 \right)\end{aligned}\quad (5)$$

となる。ここで、 s_{ij} と w_{ij} は対称テンソルと非対称テンソルで、以下のように定義される。

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (6)$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (7)$$

2次元流体では、式 (5) は以下のように書き直せる。

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \sim -2\rho_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \quad (8)$$

この論文では、式 (5)、(8) を用いて3次元、2次元の音源を計算する。

厳密な非圧縮流体の計算では、Lighthill の方程式は以下のような Poisson 方程式に書き直せる [13]。

$$-\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (9)$$

静電場のアナロジーで言うと、圧力は電位に対応し、静圧力場が Lighthill の音源項に対応する右辺の4重極項によって作り出されると解釈できる。しかし、非圧縮流体では音速が無限大になるので、音源項の影響は瞬時に全空間に伝わる。圧縮流体では、圧力の変位が有限速度（音速）で伝わるので、左辺に $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ が付け加わる。これは、式 (4)、(5) の近似を与えた Lighthill の方程式 (2) に他ならない。乱流中では、圧縮成分は非圧縮成分に比べ十分に小さいので、Lighthill の方程式 (2) は、式 (9) で良く近似される。

4 Howe の渦音理論

Lighthill の音響的類推の物理的な意味は、多くの研究者によって考えられてきた [3, 4, 5, 14, 15, 16]。Powell は Lighthill の音源項を式 (5) の最右辺のように書き直し、渦の音源としての効果について議論した [15]。Howe は Powell の議論を発展させ、Lighthill の理論を全エンタルピー（よどみ点エンタルピー） B を用いた形式に書き直した [4, 5]。ここで、全エンタルピー B は、

$$B \equiv \int dh + \frac{1}{2} v^2 \quad (10)$$

のように定義され、 h は通常の熱力学的エンタルピーである。

$$dh = \rho^{-1} dp + T dS \quad (11)$$

等エントロピー流では、 B は以下のように近似できる。

$$B \sim \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 \quad (12)$$

したがって、粘性による散逸が無視できるとすると、 B の揺らぎは、圧縮性による Bernoulli の定理の破れと解釈できる。そこで、Howe は B が音波の真の表現であると考え、以下の様な B の時間発展を記述する非線形波動方程式を導いた。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \nabla - \nabla^2 \right\} B = & \operatorname{div}\{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - T \operatorname{grad} S - \boldsymbol{\sigma}\} \\ & - \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - T \operatorname{grad} S - \boldsymbol{\sigma}\} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{c^2} T \frac{DS}{Dt} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c_p} \frac{DS}{Dt} \right) \\ & + \frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、定圧比熱 c_p は、 $c_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$ と定義され、音速 c は $\frac{1}{c^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S$ と表せ、ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ はその成分が $\sigma_i = (1/\rho) \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ ように定義される量である。

等エントロピーで、低 Mach であるが高 Reynolds 数の流れでは、式 (13) は以下のように近似される。

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) B \sim \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \quad (14)$$

この式は、 B の波源が運動する渦である事を明確に示している。近似式 (12) を上式に代入し、式の中に現れる $c_0^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v^2 / 2$ が、流体領域、音波領域のどちらの領域においても、他の項に比べて小さいと仮定すると、

$$\frac{1}{\rho c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 B \sim \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \quad (15)$$

が得られる。したがって、式 (12) の近似のもとで、式 (15) は、式 (4)、(5) の近似を与えた Lighthill の方程式 (2) に等しい。これより、Lighthill の式と Howe の式は同じ現象を別の形式で表現したものである事が分かる。

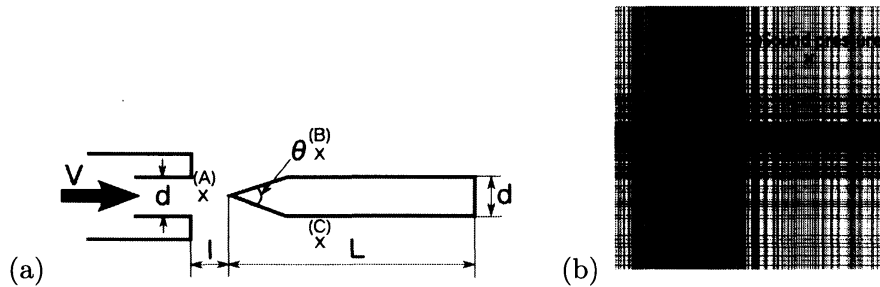


図 2: 2次元モデル (a) ノズルとエッジの配置 (b) メッシュの全体図

表 1: メッシュのパラメータ

points	cells	faces
210214	104116	417455

5 モデルと数値計算法

我々のエッジトーンの数値計算では、ジェットの流体的な運動とそれから発生する音波を同時に再現する。音速 c は約 340m/s であり、高々数十 m/s のジェットの流速 V に比べ極めて大きい。したがって、音波の伝搬を再現するには、通常の流体計算よりもより細かな時間刻みが必要である。一方、流体の渦には 1mm 以下の大きさのものも存在し、可聴領域の音波の波長 (10kHz で 34mm) に比べ遥かに小さい。したがって、通常の音波の計算よりもより細かなメッシュが必要である。このように、流体と音波の同時計算には、時間空間の両方で十分に細かな離散化が必要となる。さらに、音波の粒子速度は、流速に比べ極めて小さく、そのため、音波のエネルギーは流体のそれに比べ 10^{-4} 以下になる。そのため、減衰しながら伝搬する音波を遠方まで再現することは容易ではない。そこで、精度と計算効率を考慮し、近距離場 (数十 cm 程度) に限定したシミュレーションを行う。

この論文の数値計算では、圧縮性 LES (Large Eddy Simulation) を用いた。LES は境界層における計算に多少の不確定さがあるが、長時間の計算において極めて安定度が高いために流体音の研究で近年広く用いられている [17]。具体的には、OpenCFD 社が提供しているフリーのソフトウェア OpenFOAM の圧縮性 LES ソルバーを用いて 2 次元および 3 次元のエッジトーンの解析を行った [18]。

図 2(a) に 2 次元エッジトーンの計算に用いたモデルの形状を示す。ノズルの高さ及びエッジ板 (エッジの付いた仕切り板) の厚みは $d = 1\text{mm}$ 、ノズルの出口からエッジまでの距離は $l = 5\text{mm}$ 、エッジ角は $\theta = 20^\circ$ 、仕切り板の長さは $L = 35\text{mm}$ である。図 2(b) に数値計算に用いたメッシュの全体を示す。メッシュ大きさは $30 \times 30\text{mm}^2$ で、近距離場での流れと音波の振る舞いを記述するのに十分な大きさである。表 1 にメッシュのパラメータを示す。3 次元の計算では、紙面上の 2 次元モデルに垂直な方向に 10mm の一様な厚みを付け加え、紙面に平行な 2 枚の滑らかな面で挟み込んだモデルを用いた。紙面内のメッシュは 2 次元モデルと同じに取り、厚み方向には 40 分割したメッシュを用いた。

計算に用いたパラメータは以下の通りである。平衡状態の圧力と温度をそれぞれ $p_0 = 100\text{kPa}$ と $T_0 = 300\text{K}$ した。制御パラメータであるジェットの流速は、2 次元モデルでは $(5 \leq V \leq 30\text{m/s})$ の領域の代表的な値に取り、3 次元モデルでは $V = 10.0, 15.0, 20.0\text{m/s}$ の各値に固定した。時間刻みは $\Delta t = 10^{-7}\text{sec}$ とし、2 次元モデルでは 0.05sec まで、3 次元モデルでは 0.02sec まで計算を行った。遠方の圧力 (音圧) p の測定は、図 2(b) の点 (D) で行い。渦度 ω 、Lighthill の音源、Howe の音源は、図 2(a) の点 (A) 及び (B) で行う。点 (A) はノズルの中心軸上に置かれ、ジェットの渦度やそれが作り出す音源の測定に用いる。点 (B) は、エッジの後方に置かれ、ジェットがエッジに衝突する事で発生するロープアップした渦の渦度やそれらが作り出す音源の測定に用いる。

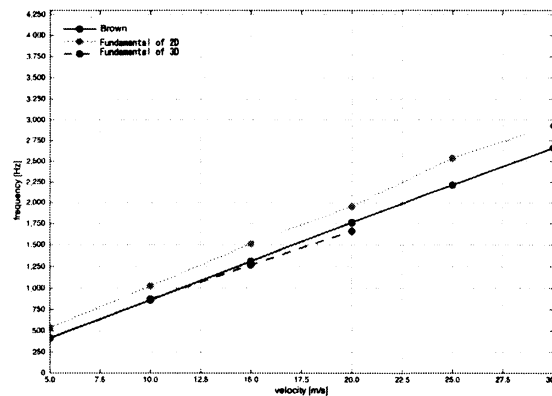


図 3: ジェットの流速と発振周波数の関係

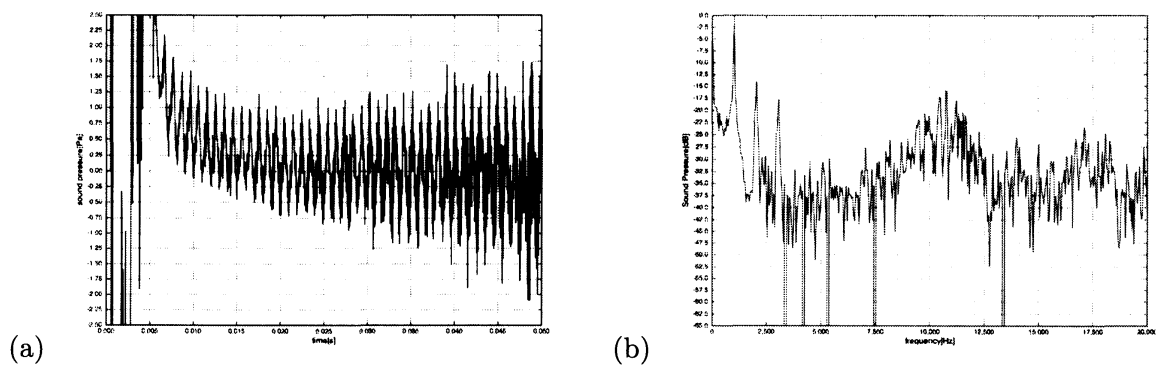


図 4: 観測点 (D) における音響的振動 (2次元モデル, $V = 10\text{m/s}$) (a) 圧力変化 (b) 圧力のパワースペクトル

6 数値解析

6.1 ジェットの流速と発振周波数の関係

まず最初に、ジェットの流速 V と発生する音波の振動数 f の関係を調べる。図 3 は、ジェットの流速 V と観測点 (D) における音圧 p の周波数 f の関係を 2 次元及び 3 次元モデルで計算し、Brown の理論式 (1) と比較したものである。3 次元の結果は都合により一部のデータしか表示していない。図 4 に、2 次元モデルを用いジェットの流速が $V = 10\text{m/s}$ の時の観測点 (D) における圧力変化とそのパワースペクトルを示している。初期の過渡状態を除くと、少し雑音混ざっているがかなり周期的な圧力変化が起きているのが分かる。また、そのパワースペクトルを見ると基音、2 倍音、3 倍音のピークが明確に立ち、雑音成分は高い周波数成分からの寄与である事が分かる。この基音の周波数 f をジェットの流速 V を変えてプロットしたのが図 3 である。

2 次元及び 3 次元両方のモデルで、エッジトーンの周波数 f は、ジェットの流速 V にほぼ比例して増加し、Brown の理論式と良い一致を示している。特に、3 次元モデルは、Brown の式とほぼ一致していると言ってよい。2 次元モデルは、Brown の式よりも全体的に周波数が高くなる傾

向が見られるが、ジェットの流れの全領域でほぼ Brown の式に沿って増加している。したがって、LES を用いた数値計算は、十分に信用できるものであり、また、2次元モデルと3次元モデルにおけるエッジトーンの発振メカニズムには、本質的に大きな違いはないと考えられる。

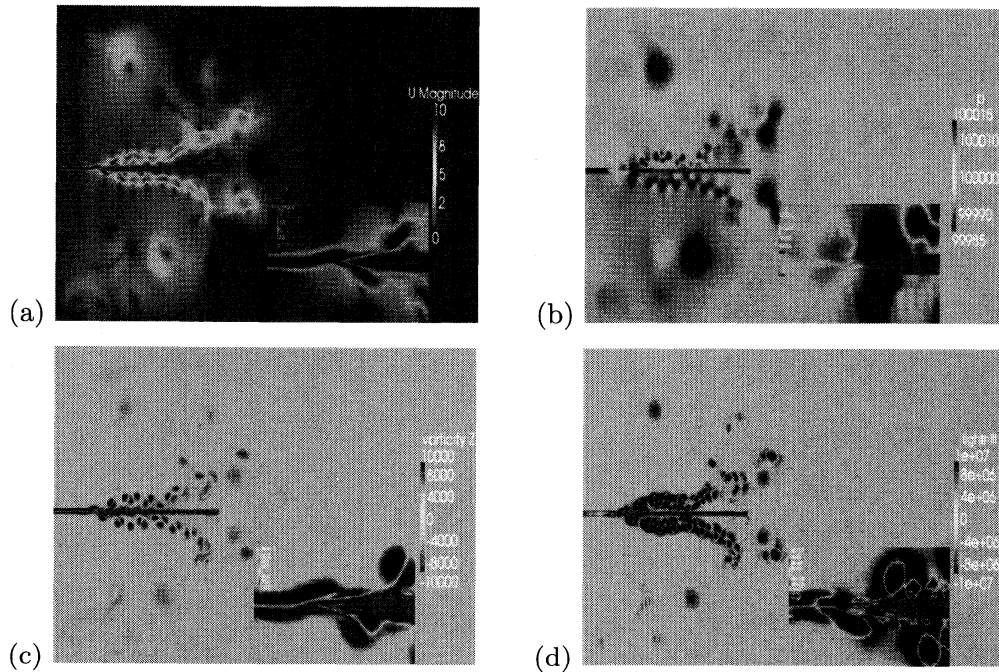


図 5: 力学量の空間分布 (2次元モデル, $V = 10\text{m/s}$, 挿入図はジェットの部分の拡大図) (a) 流速分布 (b) 圧力分布 (c) 渦度分布 (d) Lighthill の音源分布

6.2 力学量の空間分布

図 5 は、2次元モデルで $V = 10\text{m/s}$ の場合のある時刻の流速分布、圧力分布、渦度分布および Lighthill の音源分布である。図 5(a) に示すように、ジェットはノズルとエッジの間の開口部で波打って振動しエッジに衝突する。その結果、ジェットはエッジ板によって分裂し、上方および下方への供給流量は交互に周期的に増減する。上方または下方に供給された体積流は、エッジとの衝突の影響でロールアップした渦を作り、エッジ板に沿って下流へと流され、空間的にほぼ周期的な渦列を作り出す。

ジェットの振動の影響は、図 5(b) の圧力分布に明確に反映される。図に示した時刻では、エッジ板の上方に正の音圧、下方に負の音圧が発生している。半周期後には、これと逆符号の音圧が発生する。したがって、エッジ板の上下に逆位相で周期的に変動する音場が発生していると考えられる。ただし、エッジ板に沿って流れる渦の中心点近傍は必ず負圧になっている。

図 5(c) に示す渦度分布は、大きな流速を持つジェットやエッジ後方にできるロールアップした渦の近傍で大きな値を持つ。ロールアップした渦では、渦の回転方向により中心付近で正又は負の値を取る。ジェットとエッジの衝突によって正負のペアの渦が発生しエッジ板の上側又は下側

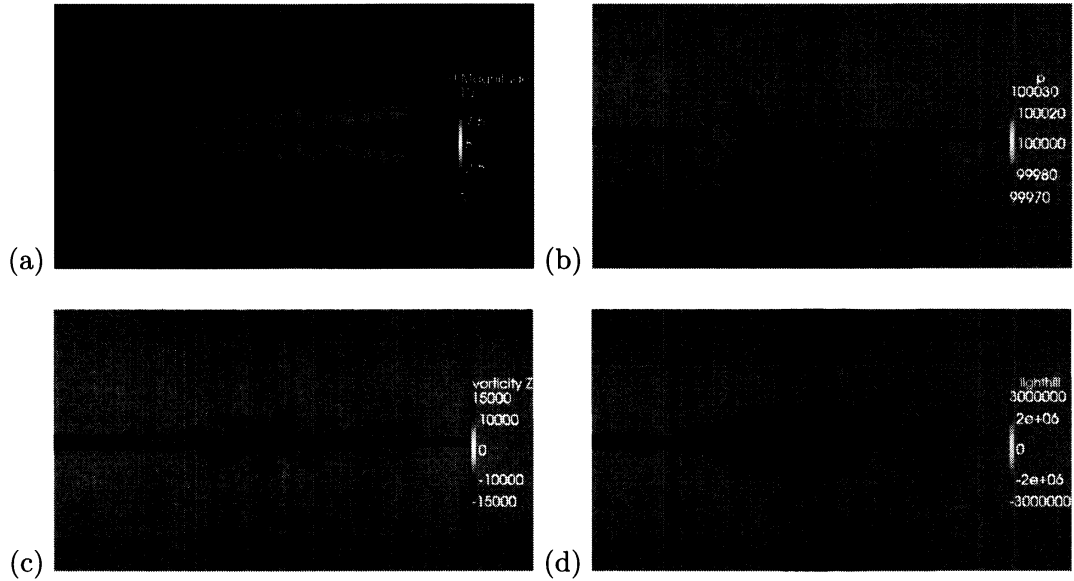


図 6: 力学量の空間分布（3次元モデル, $V = 10\text{m/s}$ ）(a) 流速分布 (b) 圧力分布 (c) 渦度分布 (d) Lighthill の音源分布

に沿って互い違いに規則的に並んでいる様子が見て取れる。一方、ジェットの部分では、挿入した拡大図を見ると分かるように、ジェット沿って、上部が正、下部が負の帯状の分布になる。

Lighthill の渦音源分布 $\frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j}$ を図 5(d) に示す。音源は、渦度分布の大きなところに局在しているのが分かる。音源は、渦の中心点近傍では、渦の回転方向と無関係に負の値を取り、その周辺領域で正の値を取る。したがって、エッジ板の上下に規則的に並んだ音源列を作り出す。一方、拡大図に示すように、ジェットの部分での Lighthill の音源分布は渦度分布と大きく異なり、上下左右に正負の符号が入れ替わる 4 重極的な分布になる。この分布の詳細についてはここではこれ以上立ち入らず、次節の Howe の音源分布との比較のところで詳しく議論する。

図 6 に、ジェットの流速を $V = 10\text{m/s}$ とした時の 3 次元モデルの結果を示す。流速分布、圧力分布、渦度分布および Lighthill の音源分布が、図 5 に示す 2 次元のそれらと極めて類似している事が見て取れる。これからもエッジトーンの発生のメカニズムの基本的な部分は 2 次元モデルを用いて十分に理解可能であることが分かる。

6.3 Lighthill の音源 vs. Howe の音源

図 7(a)、(b) に Lighthill の音源分布 $\frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j}$ と Howe の音源分布 $\text{div}(\omega \times \mathbf{v})$ を示す。Lighthill の音源分布は、図 5(d) と同じ物であるが、Howe の音源分布との比較を容易にするために再掲載した。エッジ後方に発生するロールアップした渦列では、どちらの分布も渦中心近傍で負の値を取る。ただし、Howe の方が負の値を取る領域がより小さくなっているように見える。また、Lighthill では正の値を取る周辺分布が渦を取り囲むようにあるのに対し、Howe ではその部分が小さくなり渦の間を縫うようにつながる帯状分布になっている。

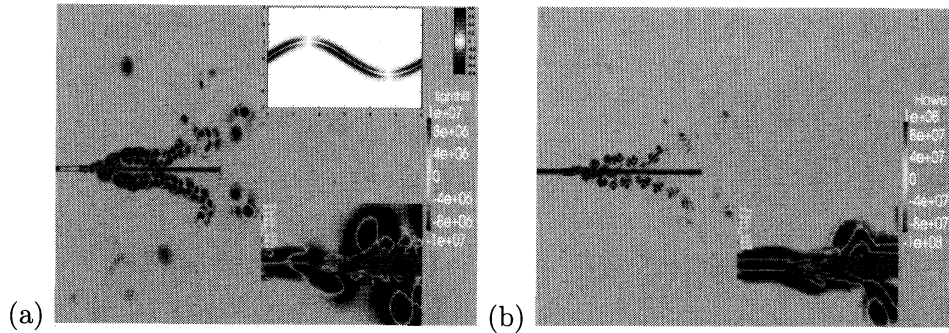


図 7: Lighthill の音源分布と Howe の音源分布の比較 (2次元モデル, $V = 10\text{m/s}$) (a) Lighthill の音源分布 (b) Howe の音源分布

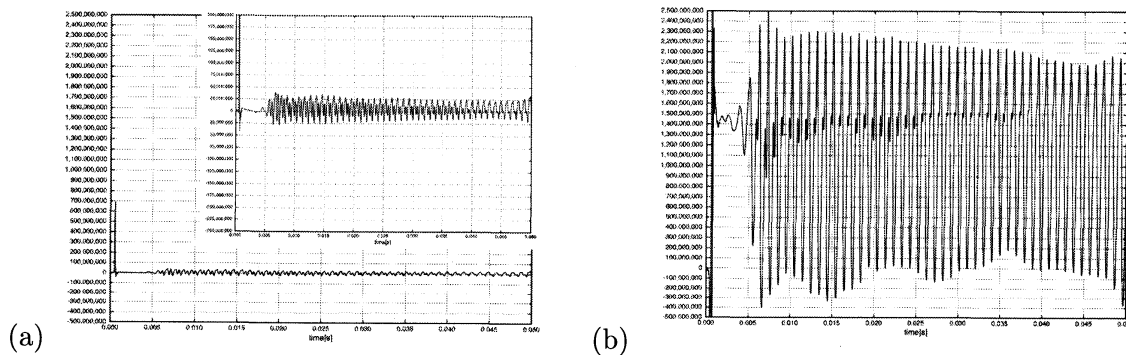


図 8: 観測点 (A) における Lighthill の音源と Howe の音源の比較 (2次元モデル, $V = 10\text{m/s}$) (a) Lighthill の音源の時間変化 (b) Howe の音源の時間変化

ジェットの部分では、さらに大きな違いが見られる。Howe の音源分布はジェットの中心軸に沿って正の値を取り、その上端と下端では負の値を取る帯状の分布になるのに対し、Lighthill の音源分布は、前節でも述べたように、上下左右に正負の値が変わる 4 重極のような分布になっている。ジェット上の分布をより詳しく観察すると、Lighthill の音源分布は、図 7(a) の上側の挿入図のように、ジェットの勾配が正の時は上端が負で下端が正の値を取り、勾配が負の時はその逆になるように見える。これが 4 重極に似た分布を作り出す要因になっている。ジェットは時間的に波のように振動するので、Lighthill の音源分布はその振動パターンに合わせその値を変化させる。この様な Lighthill と Howe の音源分布の違いは、式 (5) と式 (14) の比較から $\nabla^2 v^2/2$ の効果が無視できない事を意味する。

Lighthill の音源と Howe の音源の定量的な比較をするために、観測点 (A) 及び (B) でのそれらの時間変化を見てみよう。Fig.8(a)、(b) に、ジェット内部の観測点 (A) で見た Lighthill の音源 $\frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j}$ と Howe の音源 $\text{div}(\omega \times \mathbf{v})$ の時間変化を示す。初期の過渡状態を除き、どちらの音源も観測点 (D) で観測される音波の周期と同じ周期で規則的に振動しているのが見て取れる。しかし、Lighthill の音源 ($\sim O(10^7)$) は、Howe の音源 ($\sim O(10^9)$) に比べてほぼ 2 桁小さな値を取る事が

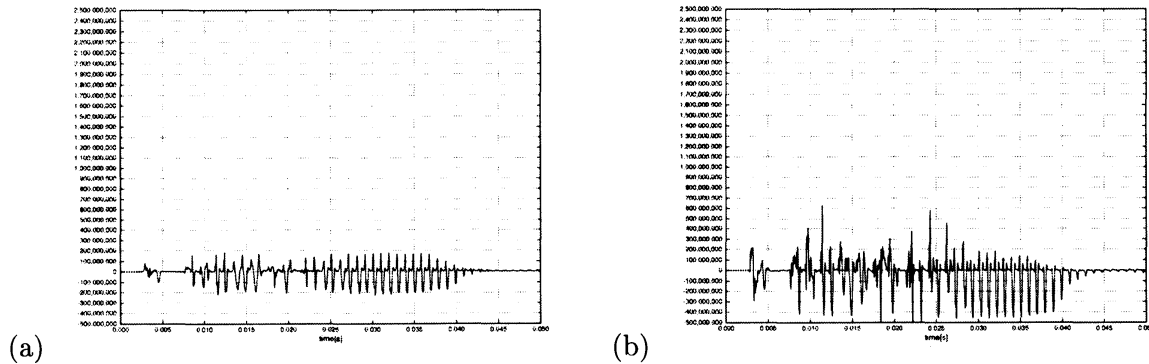


図 9: 観測点 (B) における Lighthill の音源と Howe の音源の比較 (2次元モデル, $V = 10\text{m/s}$)
(a) Lighthill の音源の時間変化 (b) Howe の音源の時間変化

分かる。これは、Lighthill の音源がジェットを中心線上ではほぼゼロの値を取るのに対し、Howe の音源ではジェットを中心線がその分布の尾根になることを差し引いても大きな違いと言える。したがって、Lighthill と Howe の音源は、その分布形状だけでなく定量的にも大きな違いがある。Howe の理論では、 $\nabla^2 v^2/2$ の項は、全エンタルピーに取り込まれるために、音源項からは取り除かれているが、この項の効果は無視できないと考えられる。Lighthill の音源項が Howe の音源項に比べて小さな値を取るためには、Howe の音源項 $\text{div}(\omega \times \mathbf{v})$ と $\nabla^2 v^2/2$ がほぼ同じ大きさの絶対値を持ち、逆符号を持てばよい。この事を確かめるために、以下ではジェットのトイモデルを作り考察して行く。その前に、観測点 (B) における Lighthill と Howe の音源の比較を見てみよう。

図 9(a)、(b) は、観測点 (B) における Lighthill と Howe の音源の時間変化を示す。エッジ後方に発生するロールアップした渦がこの観測点を通過する事で時間変動が生まれる。周期的な時間変動が起きている時間帯では渦が観測点を次々に通過している。周期的に変動している時間帯、例えば $(0.025 \leq t \leq 0.04\text{sec})$ に注目すると、どちらの音源分布も同じ位相で正負に規則的に振動している事が分かる。負の極大が現れる時刻が、渦の中心付近が観測点を通過した時刻である。この時、Howe の音源の方が Lighthill の音源よりも絶対値において倍程度の値を取る事が分かる。正の値を取る部分は、渦の周辺領域が観測点を通過していることを表す。この時、Lighthill と Howe の音源の値はほぼ同じ大きさになるが、Lighthill の方がやや大きな値を取ることがある。また、荒れた振動が見られ、ロールアップした渦が通過していないと思われる場合でも、Howe の音源の方が Lighthill の音源よりも絶対値において大きな値を取ることが多い。これらのことから、Howe の音源 $\text{div}(\omega \times \mathbf{v})$ と $\nabla^2 v^2/2$ は、ほぼ常に逆符号を持つと推測され、そのために、Lighthill の音源の方が Howe の音源よりも絶対値において小さくなると考えられる。

7 トイモデルを用いた解析

7.1 ジェットの音源分布

ここでは、Fletcher & Rossing の教科書 [6] で紹介されている振動するジェットのモデルを改良して Lighthill と Howe の音源分布を計算し比較する。

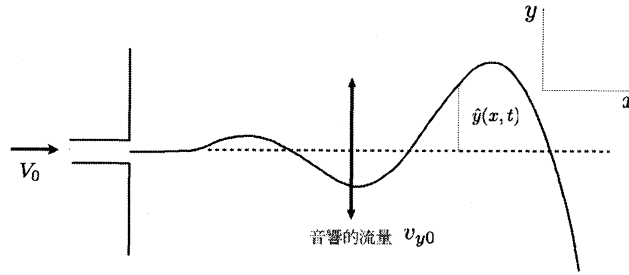


図 10: 振動するジェットモデル

まず、 x 軸方向に進む一様な幅 $2b$ を持つ振動していないジェットの速度分布は、

$$v_x = V_0 \text{sech}^2(y/b), \quad v_y = 0 \quad (16)$$

と近似できる。ここで、 V_0 は（中心線上の）ジェットの流速である。式 (16) より直ちに Lighthill の音源がゼロになることが分かる。

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = 2\rho_0 \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (17)$$

したがって、Howe の音源 $= -\rho_0 \nabla^2 \frac{1}{2} v^2$ となり、Howe の音源は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \rho_0 \text{div}(\omega \times \mathbf{v}) &= -\rho_0 \nabla^2 \frac{1}{2} v^2 = \rho_0 \frac{\partial \omega_z v_x}{\partial y} \\ &= \frac{2V_0^2}{b^2} (5\text{sech}^6(y/b) - 4\text{sech}^4(y/b)) \end{aligned} \quad (18)$$

Howe の音源は、ゼロになる事はないが、 y で積分すると

$$\int \rho_0 \text{div}(\omega \times \mathbf{v}) dy = 0 \quad (19)$$

となり、遠方では実質的に強い音圧が発生しない事が分かる。

次に、図 10 に示すように、 y 方向に音響的流速

$$v_{y0} = v_0 \sin \omega t \quad (20)$$

が加わり、そのためにジェットが波打つ場合を考えよう。このとき、ジェットの中心線は、

$$\hat{y}(x, t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t - \frac{v_0}{\omega} \cosh(\mu x) \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (21)$$

で良く近似できることが知られている。ここで、 $u \sim V_0/2$ 、 $\mu \sim k = \omega/u$ である。そこで、 $(x_L, \hat{y}(x_L, t))$ を中心線上の流体粒子の位置座標とし、 $\mu x \ll 1$ の領域では、中心線上の速度の x 成分はほぼ一定とすると、

$$x_L = V_0 t + x_0, \quad v_{xL} = \frac{dx_L}{dt} = V_0 \quad (22)$$

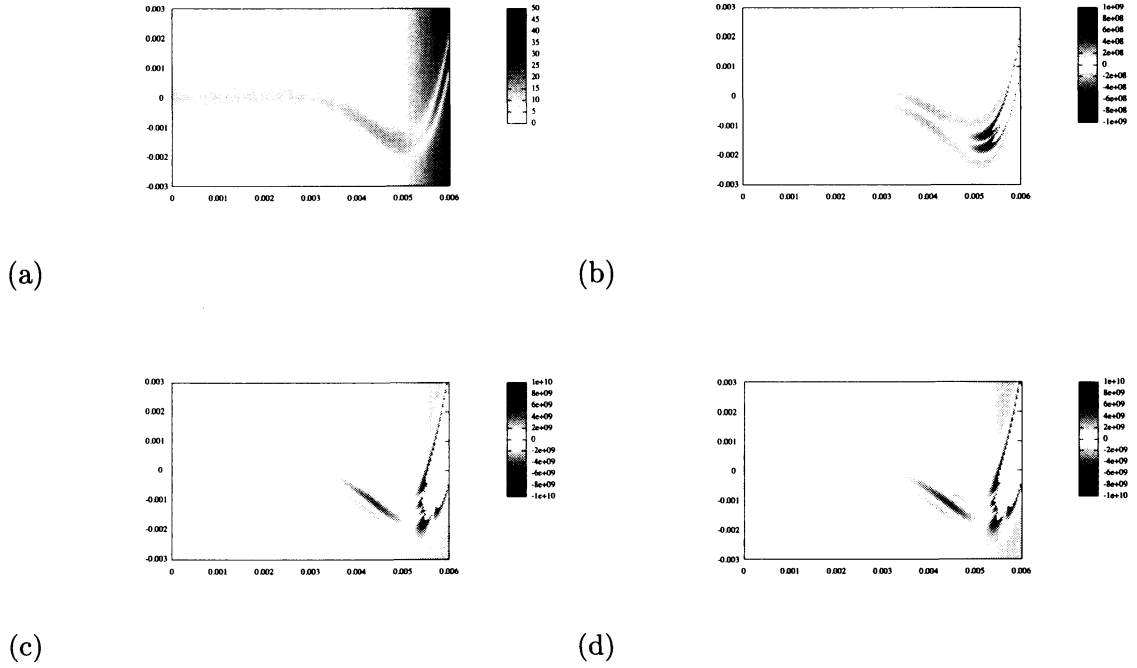


図 11: ジェットのモデルの解析結果 (a) 流速分布 (b) Lighthill の音源分布 (c) Howe の音源分布 (d) $\rho_0 \nabla^2 v^2 / 2$ の分布

となり、中心線上の速度の y 成分は、

$$\begin{aligned}
 v_{yL} = \frac{d}{dt} \hat{y}(x_L, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{y}(x_L, t) + v_{xL} \frac{\partial}{\partial x_L} \hat{y}(x_L, t) \\
 &= v_0 \cos \omega t + (v_{xL}/u - 1) v_0 \cosh(\mu x_L) \cos \omega(t - x_L/u) \\
 &\quad - \frac{v_{xL} \mu v_0}{\omega} \sinh(\mu x_L) \sin \omega(t - x_L/u)
 \end{aligned} \tag{23}$$

となる。これをもとに、中心線の周りに無摂動のジェットの速度分布 (16) と同じ分布を持ち、非圧縮条件 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ が近似的に成り立つと仮定し、速度分布を構成すると、

$$v_x = f((y - \hat{y}(x, t))/b) = V_0 \text{sech}^2((y - \hat{y}(x, t))/b) \tag{24}$$

$$v_y = \frac{\partial}{\partial t} \hat{y}(x, t) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \hat{y}(x, t) \tag{25}$$

となる。これより、Lighthill の音源を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} &= 2\rho_0 \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\
 &= 2\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \hat{y}(x, t) + v_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{y}(x, t) \right) \\
 &\sim -4 \frac{\rho_0 \mu v_0}{b} (4v_x - V_0) \frac{\sinh((y - \hat{y}(x, t))/b)}{\cosh^3((y - \hat{y}(x, t))/b)} \sinh \mu x \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \\
 &\sim O(2^4 \omega v_0 / b)
 \end{aligned} \tag{26}$$

となる。最後から2番目の近似式と式(21)より、Lighthillの音源が図7(a)の上部の挿入図の様な分布になる事が分かる。また、最後のオーダー評価は、 $e^{\mu x} \sim O(1)$ の時に成り立つ評価である。

Howeの音源は、

$$\rho_0 \operatorname{div}(\omega \times \mathbf{v}) = -\rho_0 \nabla^2 \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (27)$$

と書けるので、 $\nabla^2 v^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} \nabla^2 v^2 &= \frac{\partial^2 v_x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y^2}{\partial y^2} \\ &= 2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + 2v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + 2v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + 2v_y \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + 2v_y \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \\ &\sim O(V_0^2/b^2) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。ここで、各振動数 ω をBrownの式(1)を用いて V_0 で表し、数値計算と合うようにパラメータを $V_0 = 10\text{m/s}$ 、 $v_0 = 0.1\text{m/s}$ 、 $b = 5\text{mm}$ とにおいて、Lighthillの音源と $\rho_0 \nabla^2 v^2/2$ のオーダー評価を行うと、Lighthillの音源の大きさは $10^6 \sim 10^7$ 程度、 $\rho_0 \nabla^2 v^2/2$ は $10^8 \sim 10^9$ 程度となり、 $\rho \nabla^2 v^2/2$ の方がLighthillの音源よりも2桁程度大きな値を取る事が分かる。したがって、Howeの音源は、 $\rho_0 \nabla^2 v^2/2$ とほぼ同じ絶対値を持ち逆符号を持つ。これらのオーダー計算は、実際に求めたLighthillとHoweの音源分布のオーダーに極めて近い。

図11に、オーダー計算に使用したパラメータ値を用いて求めた、流速分布、Lighthillの音源分布、Howeの音源分布、 $\rho_0 \nabla^2 v^2/2$ の分布を示す。図で白抜きになっている所は大きな絶対値を持つために割愛した部分である。流速分布を見ると $x \leq 0.005\text{m}$ では、数値計算で得られた分布に極めて近いが、それより大きくなると勾配が大きくなり、中心線に沿った分布も細くなり徐々に非現実的な分布になって行く。Lighthillの音源分布を見ると図7(a)の上部の挿入図の分布に近い分布になっているのが分かる。Howeの音源分布では中心線に沿って正の値を、上端と下端で負の値を取り数値計算で得られたものと良い一致を示す。さらに、 $\rho_0 \nabla^2 v^2/2$ の分布は、ほぼHoweの音源分布の正負を反転させたものであることが分かる。したがって、それらの和であるLighthillの音源分布は、Howeの音源分布に比べオーダー的に極めて小さい事が分かる。

7.2 渦の音源分布

数値計算ではエッジ板に沿って渦列が観測された。ここでは、渦列の簡単なモデルであるStuart渦列を用いてLighthillとHoweの音源分布を計算し比較する[13]。

Stuart渦列の速度成分は、

$$v_x = U \frac{\sinh(2\pi y/a)}{\cosh(2\pi y/a) - q \cos(2\pi x/a)} \quad (29)$$

$$v_y = -U \frac{\sin(2\pi x/a)}{\cosh(2\pi y/a) - q \cos(2\pi x/a)} \quad (30)$$

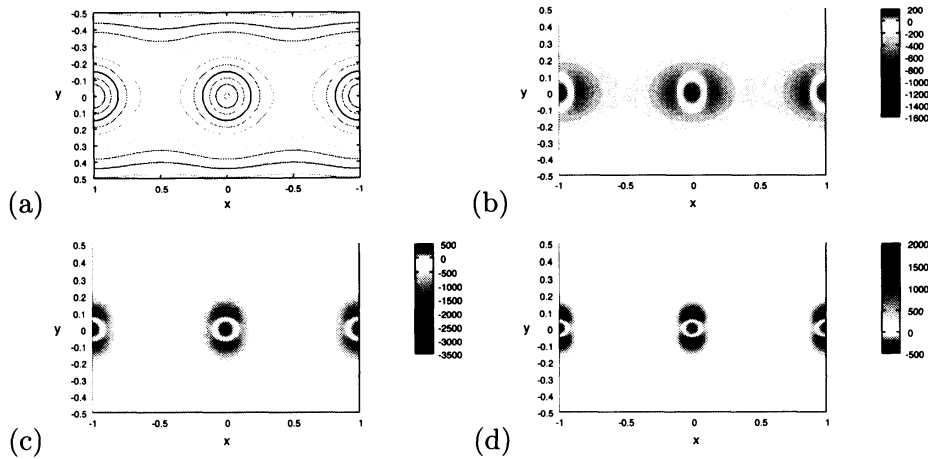


図 12: Stuart 渦列の解析結果 (a) 流線 (b) Lighthill の音源分布 (c) Howe の音源分布 (d) $\rho_0 \nabla^2 v^2 / 2$ の分布

で与えられる。ここで、 $y \rightarrow \pm\infty$ で流速は $\pm U$ となり、 a と $q (0 < q \leq 1)$ は渦の大きさと縦横比を決めるパラメータである。これから Lighthill の音源を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} &= 2\rho_0 \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ &= 2\rho_0 U^2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \frac{q^2 \cosh(2\pi y/a) - q \cos(2\pi x/a)}{(\cosh(2\pi y/a) - q \cos(2\pi x/a))^3} \end{aligned} \quad (31)$$

となり、渦の中心での値は、例えば $x = y = 0$ とおくと、

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x=0, y=0} = -U^2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \frac{q}{(1-q)^2} < 0 \quad (32)$$

となり、必ず負の値を取る事が分かる。Howe の音源は、

$$\text{div}(\omega \times \mathbf{v}) = -\rho_0 \nabla^2 \frac{v^2}{2} + \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (33)$$

で与えられ、渦の中心では、

$$\text{div}(\omega \times \mathbf{v}) \Big|_{x=0, y=0} = -U^2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \frac{1+q+q^2}{(1-q)^2} < 0 \quad (34)$$

となり、やはり負の値を取る。 $(0 < q \leq 1)$ なので、Howe の音源の方が Lighthill の音源よりも渦中心で倍以上大きな絶対値を取る事が分かる。

図 12 に、 $U = 1$ 、 $a = 1$ 、 $q = 0.8$ に取った場合の Stuart 渦の流線、Lighthill の音源分布、Howe の音源分布、 $\rho_0 \nabla^2 v^2 / 2$ の分布を示す。Lighthill と Howe の音源分布は共に渦中心近傍で負の値を取り、その周辺で正の値を取る。ただし、Lighthill の音源の方が中心の負値の領域が広く、周辺の正値の領域も広く広がっているのが分かる。また、 $\rho_0 \nabla^2 v^2 / 2$ の分布は、Howe の音源分布をほぼ逆符号にしたものになる。したがって、Stuart 渦列から求めた音源分布は、数値計算から得られた渦列の音源分布の特徴を定性的に良く捉えている。

8 結論

この論文では、圧縮性 LES を用いて、2次元及び3次元エッジトーンの解析を行った。その結果、2次元、3次元の両方で、ジェットの流れと周波数の関係において Brown の半経験的理論式とよい一致を得た。3次元の結果の方がより Brown の式に近い結果が得られたが、2次元モデルでも現実のエッジトーンの基本的なメカニズムを十分に捉えていると言える程度の一致が見られた。また、流速分布、圧力分布、渦度分布においても2次元と3次元の結果は極めて似ている。

2次元モデルを用いて、Lighthill の音源分布及び Howe の音源分布を調べた結果、どちらの音源も、強い渦度を持つジェットの部分やジェットとエッジの衝突によってできるエッジ板に沿った渦列で大きな値を持つ事が分かった。しかし、二つの音源分布は、その形状や強度において明らかに違いがある。渦列においては、どちらの音源も渦の中心近傍で負値を取り、その周辺で正値を取るが、中心付近の強度が Howe の音源の方が数倍大きな値を取ることが分かった。この事は、Stuart 渦列モデルを用いた理論解析からも確かめられた。ジェットに沿った音源分布は、Lighthill と Howe では全く異なった分布になり、Howe の方が2桁近く大きな強度を持つ事が分かった。この事は、ジェットのトイモデルを用いた理論解析でも確かめられた。

これらのことから、Lighthill の音源と Howe の音源は一般に定性的にも定量的にも異なる物であり、強度において Howe の音源の方が数倍から2桁程度大きな値を取ると考えてよい。Lighthill の音源は、Howe の音源に $\rho_0 \nabla^2 v^2 / 2$ を加えて得られるが、上記の結果より、 $\rho_0 \nabla^2 v^2 / 2$ は Howe の音源とほぼ同じ大きさを持ち、正負の符号を変えた分布になると考えられる。よく、 $\rho_0 \nabla^2 v^2 / 2$ は Howe の音源よりも小さく、したがって、Lighthill の音源 \sim Howe の音源と考え、Howe の音源から線形波動の Green 関数を介して遠距離音場を求めることが行われるが、上記の結果から言えば、この方法では正しい遠距離音場が得られない。Lighthill の音源から Green 関数を用いて求めるのが良いように思われる。Howe の理論では、全エンタルピーが非線形波動方程式に従うので、線形波動の Green 関数を用いる近似が正しい結果を与えない事があるからである。

9 謝辞

本研究は、科学研究費補助金挑戦的萌芽研究 No.20654035 及びサウンド財団の研究支援金の援助を受けている。また、JHPCN 学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点プロジェクトの一環として行われた。

参考文献

- [1] G.B. Brown, 'The vortex motion causing edge tones', Proc. Phys. Soc., London **XLIX** 493-507 (1937).
- [2] D.K.Holger, T.A.Wilson and G.S.Beavers, 'Fluid mechanics of the edgetone', J. Acoust. Soc. Am. **62** 1116-1128 (1977).
- [3] D.G.Crighton, 'The jet edge-tone feedback cycle; linear theory for the operating stages', J. Fluid Mech. **234** 361-391 (1992).

- [4] M.S. Howe, *Acoustics of Fluid-Structure Interactions*, (Cambridge Univ. Press, 1998).
- [5] M.S. Howe, 'Contributions to the theory of aerodynamic sound with application to excess jet noise and the theory of the flute', *J. Fluid Mech.* **71** 625-673 (1975).
- [6] N.H.Fletcher and T.D.Rossing, *'The Physics of Musical Instruments'*, 2nd Edition (Springer-Verlag, New York 1998).
- [7] A.Hirschberg, "Aero-acoustics of Wind instruments." in "Mechanics of Musical Instruments," Eds. A.Hirschberg, J.Kergomard and G.Weinreich. (Springer-Verlag, Vienna and New York 1995), pp.291-369.
- [8] T. Kobayashi, T. Takami, M. Miyamoto, K. Takahashi, A. Nishida, M.Aoyagi, '3D Calculation with Compressible LES for Sound Vibration of Ocarina', Open Source CFD International Conference 2009, November 12-13th, Barcelona, Spain(CD-ROM).
- [9] M. Miyamoto, Y. Ito, K. Takahashi, T. Takami, T. Kobayashi, A. Nishida, M.Aoyagi, 'Numerical study on sound vibration of an air-reed instrument with compressible LES', preprint, <http://arxiv.org/abs/1005.3413>.
- [10] 12. M. Miyamoto, Y. Ito, K. Takahashi, T. Takami, T. Kobayashi, A. Nishida and M. Aoyagi, "Applicability of compressible LES to reproduction of sound vibration of an air-reed instrument", Proceeding of ISMA2010(CD-ROM), paper no 37, August 26-31, Sydney and Katoomba, Australia.
- [11] K. Takahashi, M. Miyamoto, Y. Ito, T. Takami, T. Kobayashi, A. Nishida and M. Aoyagi, "Numerical analysis on 2D and 3D edge tones in terms of aerodynamic sound theory", Proceeding of ICA2010(CD-ROM), paper no 621, August 23-27, Sydney, Australia.
- [12] M.J. Lighthill, 'On sound generated aerodynamically. Part I: General theory', *Proc. Roy. Soc. London A* **211** 564-587 (1952).
- [13] 木田重雄, 柳瀬眞一郎, 「乱流力学」(朝倉書店, 1999).
- [14] N.Curle, 'The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound', *Proc. R. Soc. London A* **231** 505-514 (1955).
- [15] A. Powell, 'Theory of vortex sound', *J.Acoust. Soc. Am.* **36** 177-195 (1964).
- [16] D.G.Crighton, 'Basic principles of aerodynamic noise generation', *Prog. Aerospace Sci.* **16** 31-96 (1975).
- [17] C. Wagner, T. Hüttl, and P. Sagaut, eds. 'Large-Eddy Simulation for Acoustics', (Cambridge Univ. Press, New York, 2007).
- [18] <http://www.openfoam.com/>